ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

PROBLEME 1

I. $\alpha \in R$, $\alpha \notin Z$; f est la fonction 2π - périodique définie dans $[-\pi , \pi[$ par :

$$f : x \to \cos(\alpha x) .$$

1. Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.
2. En déduire que l'on a :

$$\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} .$$

II. $\alpha \in R$, $\beta \in R$. On considère les trois intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t^{\alpha}}\,dt \quad ; \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{t^{\beta-1}}{1+t^{\alpha}}\,dt \quad ; \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\beta-1}}{1+t^{\alpha}}\,dt .$$

1. Déterminer et représenter, dans un plan rapporté à un repère orthonormal, pour chacune des intégrales I, J *et* K , les couples (α , β) pour lesquels ces intégrales convergent.
Sur les domaines de définition respectifs des intégrales I , J et K, on définit les trois fonctions g , h *et* f telles que :

$$g(\alpha , \beta) = I \quad , \quad h(\alpha , \beta) = J \quad \text{et} \quad f(\alpha , \beta) = K .$$

2. Soit $\lambda \in R^*$. Pour $\lambda > 0$ puis pour $\lambda < 0$, comparer $g(\lambda\alpha , \lambda\beta)$ à $g(\alpha , \beta)$ *et* $h(\lambda\alpha , \lambda\beta)$ *à* $h(\alpha , \beta)$.

3. $t \in R_+^*$; soit S la fonction d'une variable telle que :

$$S(t) = \frac{t^{\beta-1} + t^{\alpha-\beta-1}}{1+t^{\alpha}} .$$

Sur le domaine de convergence de l'intégrale K, comparer $f(\alpha , \beta)$ à $\int_0^1 S(t)\,dt$, *puis à* $\int_1^{+\infty} S(t)\,dt$.

Sur le domaine défini par $0 < \beta < \alpha$, comparer $f(\alpha , \beta)$ *à* $f\left(\frac{\alpha}{\beta} , 1\right)$ et à $f\left(1 , \frac{\beta}{\alpha}\right)$.

4. $\alpha \in]1 , +\infty[$; soit F la fonction d'une variable telleque $F(\alpha) = f(\alpha , 1)$.
Calculer $F(\alpha)$ en fonction de α , puis $f(\alpha , \beta)$ en fonction de α et β , avec $0 < \beta < \alpha$.

5. Pour $0<a<1$, calculer l'intégrale $L(a)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$.

PROBLEME 2

On note E l'espace vectoriel sur R des fonctions continues sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, à valeurs réelles.

Si $f\in E$, on note F l'application de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dans R définie par :

$$\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\quad F(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2|x-y|)\,f(y)\,dy$$

1. Pour f et g appartenant à E, on pose : $(f\mid g)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)\,dx$.

   Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E. Dans la suite du problème E est muni de ce produit scalaire et de la topologie définie par la norme $\|f\|=\sqrt{(f\mid f)}$.

2. a) Montrer que F est de classe C^2 sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ calculer $F''(x)+4F(x)$ en fonction de $f(x)$.

   b) Comparer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ puis $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $F'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

On note A l'application de E dans E définie par : $\forall f\in E,\ A(f)=F$.

3. Montrer que A est un endomorphisme injectif de E.

4. Montrer que A est un endomorphisme continu de l'espace préhilbertien réel E.

5. Montrer que : $\forall f\in E,\forall g\in E,\quad (A(f)\mid g)=(f\mid A(g))$.

6. Déterminer l'image de l'endomorphisme A.

7. Soit $f\in E$, $f\neq 0$. Montrer que f est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si :

$$f\in Im\,A \quad\text{et}\quad \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \lambda f''(x)+4(\lambda-1)f(x)=0.$$

8. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de A.